L3-SPC . Partiel de Nov. 11 - Electromagnétisme de la matière.

(1pt) **Q1** : $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1+\chi_e)\vec{E}$; $|\vec{D}|$ et $|\vec{P}|$ en C/m^2 ; $|\vec{E}|$ en V/m.
$\vec{P}$ = vecteur polarisation ; $\vec{D}$ vecteur induction électrique ;
$\vec{E}$ = vecteur champ électrique macroscopique.

(2pts) **Q2** : Sphère uniformément polarisée : pour $r<R$, le théorème de Gauss $\Rightarrow$

$$Q_{in} = \rho_0 \times \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \vec{E}^{*}_{in} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\cdot\vec{r} \text{ et } V_{m,in} = \frac{\vec{P}}{\rho_0}\cdot\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\vec{r} = \frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{3\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_{m,in} = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\,\overrightarrow{grad}\,(\underbrace{\vec{P}\cdot\vec{r}}_{P\cdot z}) = -\frac{P}{3\varepsilon_0}\underbrace{\overrightarrow{grad}\, z}_{\vec{e}_z} \Rightarrow \vec{E}_{m,in} = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}.$$

Q3 : Avec $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$ et $\underline{\vec{u}} = \underline{\vec{U}}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$ (déplacement des charges), le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

0,5 $$-m\omega^2\underline{\vec{U}} = q\,\underline{\vec{\mathcal{E}}} + i\,\frac{m\omega}{\tau}\cdot\underline{\vec{U}} - \underbrace{m\omega_0^2\cdot\underline{\vec{U}}}_{0}$$ avec $\omega_0 = 0$ pour les électons libres.

1 $$\Rightarrow \underline{\vec{U}} = -\frac{q}{m}\,\frac{\underline{\vec{\mathcal{E}}}}{\omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}} \Rightarrow \underline{\vec{P}} = N q \underline{\vec{U}} = \underbrace{-\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\omega^2+i\frac{\omega}{\tau}}}_{\underline{\chi_e}}\cdot\varepsilon_0\underline{\vec{\mathcal{E}}}$$

0,5 On pose $\omega_p = \left(\frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\right)^{1/2}$ = pulsation plasma.
τ est le temps de relaxation (la force de "viscosité" $= -\frac{m\vec{v}}{\tau}$).

0,5 $$\Rightarrow \underline{\chi_e} = \frac{-\omega_p^2}{\omega^2\left(1+\frac{i}{\omega\tau}\right)} \text{ et } Re(\underline{\chi_e}) = \chi_e = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\,\frac{1}{1+\frac{1}{\omega^2\tau^2}} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2+\tau^{-2}}$$

total (2,5 pts)

I. Sphères de matière linéaire, homogène et isotrope.

(9pts) **I.1)** I.1.1. $\vec{E}_{in} = \vec{E}_a - \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} = \vec{E}_a - \frac{1}{3\varepsilon_0}(\varepsilon_0\chi_e\vec{E}_{in}) \Rightarrow \vec{E}_{in}\left(1+\frac{\chi_e}{3}\right) = \vec{E}_a$ (1pt)

I.1.2. $\vec{E}_{in} = \frac{3\vec{E}_a}{3+\chi_e} \Rightarrow \vec{P} = \frac{3\chi_e\varepsilon_0}{3+\chi_e}\vec{E}_a$ (2pts)

I.1.3. conducteur parfait : $\vec{E}_{in} = \vec{0} \Rightarrow \chi_e \to \infty$ car $|\vec{E}_a|$ est fini $\Rightarrow \vec{P} \simeq 3\varepsilon_0\vec{E}_a$ (1pt)

I.1.4. $\vec{p} = \vec{P}\cdot\text{Volume} = 3\varepsilon_0\vec{E}_a \times \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^3\varepsilon_0\vec{E}_a$. (1pt)

I.2) $\vec{P}_{m.a.} = n_v\cdot\vec{p} = n_v\cdot 4\pi r^3\cdot\varepsilon_0\vec{E}_a = \varepsilon_0\cdot\chi_{m.a.}\,\vec{E}_a \Rightarrow \chi'_{m.a.} = 4\pi n_v r^3$ (2pts)

I.3) Q3 $\Rightarrow \chi_e = \frac{-\omega_p^2}{\omega^2+\tau^{-2}}$; Pour une sphère $\vec{p} = \vec{P}\cdot\text{Volume} = \frac{3\chi_e\varepsilon_0}{3+\chi_e}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\cdot\vec{E}_a$

$$\vec{P}_{m.a.} = \underbrace{4\pi r^3\cdot n_v\cdot\frac{\chi_e}{3+\chi_e}}_{\chi_{m.a.}}\,\varepsilon_0\vec{E}_a \quad \text{avec } \chi_{m.a.} = \frac{-\omega_p^2}{3(\omega^2+\tau^{-2})-\omega_p^2}\times 4\pi r^3 n_v$$

(2pts)

L3. SPC. Partiel de Nov. 11. Electromagnétisme de la matière.

6pts II. Polarisabilité de déplacement atomique.

II.1. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à chaque type d'ions donne les deux équations où la force de rappel d'origine électrostatique est donnée par $(-k(u^+-u^-))$ pour le premier et son opposé pour le second. Cette force est en N donc k est en N/m. Le champ local E_ℓ est en V/m, $M^\pm$ en kg, e en C. (1pt)

1pt II.2.
$$\left.\begin{aligned} M^+\frac{d^2u^+}{dt^2} &= -kw + eE_\ell \quad \left(\times\frac{1}{M^+}\right) \\ M^-\frac{d^2u^-}{dt^2} &= kw - eE_\ell \quad \left(\times\frac{1}{M^-}\right)\end{aligned}\right\}$$
Retranchons membre à membre:
$$\frac{d^2w}{dt^2} \underset{(1pt)}{=} -k\left(\frac{1}{M^+}+\frac{1}{M^-}\right)w + e\left(\frac{1}{M^+}+\frac{1}{M^-}\right)E_\ell$$
$$\frac{d^2w}{dt^2} = -\frac{k}{M}w + \frac{e}{M}E_\ell \Rightarrow \left\{-\omega^2 w_0 = -\bar{\omega}^2 w_0 + \frac{e}{M}E_0\right\} \text{ avec } \bar{\omega}^2 = \frac{k}{M} \quad (1pt)$$

3pts II.3
$$\underset{(1pt)}{w_0\left(\bar{\omega}^2-\omega^2\right) = \frac{e}{M}E_0} \Rightarrow \alpha_{d.i.} = \frac{p}{E_\ell} = \frac{e\,w_0}{E_0} = \frac{e^2}{M(\bar{\omega}^2-\omega^2)} \quad (1pt)$$

1pt II.4.
$$k = 32\ \text{N/m} \text{ et } M = 2.10^{-26}\ \text{kg} \Rightarrow \bar{\omega} = \sqrt{\frac{k}{M}} = 4\ 10^{13}\ \text{rd/s}$$
$$\nu = \frac{c}{\lambda} \text{ et } h\nu = \hbar\bar{\omega} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c}{\bar{\nu}} = \frac{2\pi c}{2\pi\bar{\nu}} = \frac{2\pi c}{\bar{\omega}} \simeq 4{,}7\ 10^{-5}\ \text{m} = 47\ \mu\text{m}$$
(1pt)

total 20,5 pts